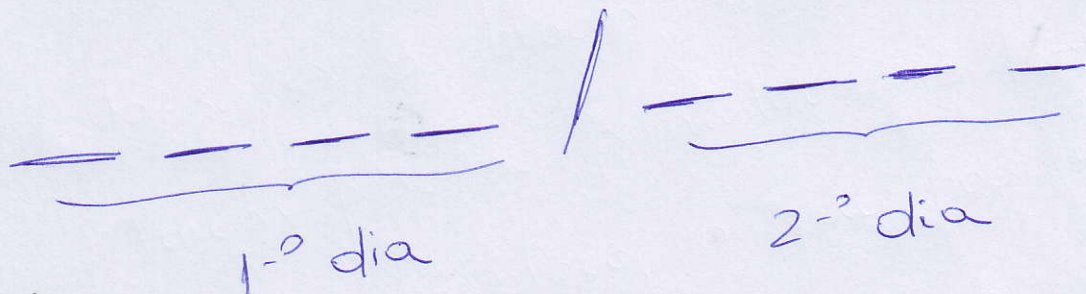


3.º Médio - 2011

GABARITO

- 1) 8 matérias para distribuir em 2 dias.

Equivalente a 2 grupos de 4



A 1.ª prova pode ser escolhida de 8 maneiras, a segunda de 7, a terceira de 6 e a 4.ª de 5 maneiras, fechando o 1.º dia. Como a ordem das provas não muda o grupo de provas daquele dia temos:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70 \text{ maneiras}$$

Para o 2º dia restam 4 provas das Pág. ②
4 matérias restantes. Pelo mesmo raciocínio
anterior (1º dia), teremos:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = ①$$

A resposta é $70 \cdot 1 = \boxed{70 \text{ maneiras distintas.}}$

Uma pergunta comum é: por que não se
divide a resposta por $2!$ já que são 2
grupos com uma quantidade idêntica?

Repare que os dias de aplicação são
diferentes. Realizar 4 provas em uma
2ª feira e 4 na 3ª feira é DIFERENTE
de inverter a ordem das provas. Neste
caso, não se divide a resposta por $2!$

2) 4 vitaminas

Pág. ③

3 sais minerais

Combinar 3 nutrientes $\Rightarrow$ — — —

(no MÁXIMO 2 sais minerais).

Dizer no máximo 2, significa dizer

que pode-se não ter sais minerais,

pode-se ter apenas 1 sal mineral e

até 2 sais minerais. 3 casos a

considerar:

1.^o caso - (Sem sais minerais) -

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = \left(\begin{array}{l} \text{a ordem das} \\ \text{vitaminas não} \\ \text{interfere na} \\ \text{mistura} \end{array} \right)$$
$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \textcircled{4}$$

2.^o caso (1 sal mineral)

$$\frac{3}{\text{Sal}} / \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{2!} = \textcircled{18}$$

vitaminas

3.^o caso: (2 sais minerais)

Pág. (4)

$$\frac{\frac{3}{\text{SAL}} \frac{2}{\text{SAL}}}{\text{SAL}} \bigg/ \frac{4}{\text{Vitamina}} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 4 = 12$$

A resposta é $4 + 18 + 12 = 34$ alternativa (C)

Também poderíamos utilizar o método destrutivo, ou seja, contar todas as casos possíveis e subtrair o total de casos com 3 sais minerais

$$\text{TOTAL} = \frac{7}{\text{SAL}} \frac{6}{\text{SAL}} \frac{5}{\text{SAL}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

$$3 \text{ sais minerais} \Rightarrow \frac{3}{\text{SAL}} \frac{2}{\text{SAL}} \frac{1}{\text{SAL}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1$$

$$35 - 1 = 34$$

(1)

3) 625!

O número de zeros que um número termina é do tipo $(10)^n$!

$$\text{Exemplo} = 10^1 = 10 - 1 \text{ zero}$$

$$10^2 = 100 - 2 \text{ zeros}$$

⋮

$$10^n = 1000 \dots 0 - n \text{ zeros}$$

Como $10^n = 2^n \cdot 5^n$ e na decomposição de 625^n temos muito mais fatores de base 2 do que de base 5; basta saber quantas potências de 5 estão presentes em 625!

Para isso basta dividir 625 pelas potências de 5.

$$\frac{625}{5} = 125$$

$$\frac{625}{5^3} = 5$$

$$\frac{625}{5^2} = 25$$

$$\frac{625}{5^4} = 1$$

$$625! = A \cdot B \cdot C \dots \cdot 5^{125} \cdot 5^{25} \cdot 5^5 \cdot 5^1 = ABC \dots 5^{156}$$

Logo, 625! termina em 156 zeros.

$$4) \begin{array}{l|l} 10 \text{ réus} & 3 \text{ SP} \\ & 3 \text{ MG} \\ & 3 \text{ RS} \\ & 1 \text{ BA} \end{array}$$

~~Julgar~~ Julgar consecutivamente os 3 paulistas significa "amarrar" os 3 paulistas, formando um único bloco entre eles.

SP₁ SP₂ SP₃ —————
demais réus

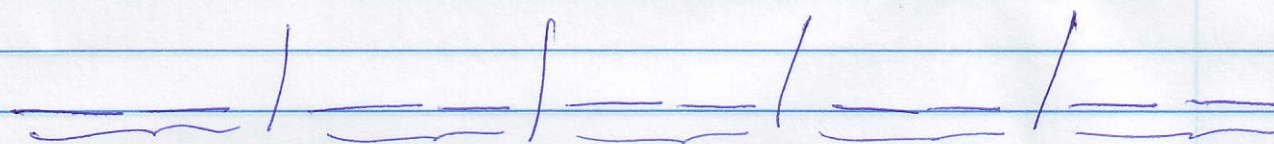
temos o equivalente a 8 pessoas (7 separadas e 1 bloco com os 3 paulistas). Ora, permutando-se os 8 blocos, teremos 8! arranjos.

Porém pode-se permutar os 3 paulistas dentro do bloco, o que pode ser feito de 3! maneiras. A resposta é:

$$8! \cdot 3! = 40.320 \cdot 6 = \boxed{241.920}$$

5) Dividir 10 livros diferentes em 5

Caixas idênticas e dividir em 5 grupos de 2



C_1

C_2

C_3

C_4

C_5

$$\frac{10 \cdot 9}{2!}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2!}$$

$$\frac{6 \cdot 5}{2!}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2!}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{2!}$$

↓
a ordem dos

livros não

altera o grupo

dentro da caixa

↓
O mesmo raciocínio
anterior

$$\frac{45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{5!}$$

(5!)

↳ Divide-se por 5! pois as

caixas são IDÊNTICAS.

Tanto faz trocar as caixas,

nada mudará

Resposta :

(945)

6) PIRACICABA

Exclui-se os 3 A

(VAGA 1) P (VAGA 2) I (VAGA 3) R (VAGA 4) C (VAGA 5) C (VAGA 6) C (VAGA 7) B (VAGA 8)

As 7 letras diferentes de A podem ser permutadas à vontade:

$$\text{Temos } \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

Agora, devemos inserir os 3 A.

Temos 8 vagas possíveis (desenho).

Ona para o 1º A, 8 possibilidades;

para o 2º A; 7; para o 3º, 6.

Como os "A" são iguais, temos

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$$

$$\text{A resposta é } 1.260 \times 56 = \boxed{70.560}$$

7) 18 latas
5 tipos

A soma dos tipos de lata será sempre 18. Ora, como só há 5 tipos de lata, obrigatoriamente algum tipo será repetido.

$$x + y + z + k + t = 18;$$

sendo x, y, z, k e t os tipos de lata disponíveis.

$$\left. \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ k \\ t \end{array} \right\} = 18$$

$$CR_{18}^5 = C_{18}^{18+5-1} = C_{18}^{22} = \frac{22!}{18!4!} =$$

$$\frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{18 \cdot 4} =$$

$$\boxed{7.315}$$

$$8) \quad \boxed{H|M} \quad \boxed{H|M} \quad \boxed{H|M} \quad \boxed{H|M}$$

B_1

B_2

B_3

B_4

$$\text{Homens} = 4! \quad (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$\text{Mulheres} = 4! \quad (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

Cada Casal pode permutar no banco.

$$(2! \text{ para cada banco}) \cdot (2!)^4$$

$$\text{Resposta: } 4! \cdot 4! \cdot (2!)^4 = 24 \cdot 24 \cdot 16$$

$$= \boxed{9216}$$

$$9) \quad 128.376 \Rightarrow 6 \text{ algarismos}$$

$$\text{Permutando-se} \Rightarrow 6! = 720 \text{ números}$$

Posição do 812.367?

$$\underline{5} \quad / \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1}$$

Todo número iniciado por 1, 2, 3, 6 ou 7

será menor que 812.367

$$\text{então: } 5 \times 5! = 600 \text{ números}$$

O 1º número iniciado por 8 em ordem crescente é exatamente 812.367.

Então ele ocupa a 601ª posição

10) $x + y + z + w + m = 10$

$$C_{10}^{10} = C_{10}^{10+5-1} = C_{10}^{14} =$$

$$\frac{14!}{10! 4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!} 4!}$$

$$= \boxed{1001 \text{ soluções}}$$